Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Klaus Spitzmüller
Dipl.-Inform. Wolfgang Globke

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 14 **Wintersemester 2008/2009**

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z}) = \{A = (a_{ij}) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1 \text{ und } a_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ für alle } i, j\}$$

eine Gruppe ist.

Aufgabe 2

Die *Fibonacci-Zahlen* sind definiert durch die Rekursion

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2, \\ f_0 &= 0, \quad f_1 = 1. \end{aligned}$$

Die *Fibonacci-Matrix* ist

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie: $F^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$ für $n \geq 1$.

(b) Zeigen Sie, dass F zwei verschiedene reelle Eigenwerte γ und δ besitzt.

Bestimmen Sie außerdem die Eigenräume E_γ, E_δ und stellen Sie $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von Eigenvektoren dar.

(c) Geben Sie eine geschlossene Formel für f_n an (d.h. eine Formel, die nur von n abhängt, aber nicht von $f_{n-1}, \ldots, f_0$).

Aufgabe 3

Gegeben sei die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 2+t & 4 & 2+t & 2+t \\ t-2 & 0 & -6+t & -2-t \\ -t+2 & -4 & -t+2 & -2-t \\ 0 & 0 & 0 & 2\,t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4

(a) Es sei $f \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom vom Grad n.

Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ an, deren charakteristisches Polynom f ist.

(b) Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie: $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$.

(c) Es seien $C, D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ähnliche Matrizen. Folgern Sie aus Teil (b): $\mathrm{Spur}(C) = \mathrm{Spur}(D)$.

Aufgabe 5[1]

Eine Verkettung von linearen Abbildungen, der Form

$$V_1 \xrightarrow{\Phi} V_2 \xrightarrow{\Psi} V_3$$

heißt *exakte Sequenz*, wenn Kern $\Psi =$ Bild Φ gilt.

(a) Es sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass

$$U \overset{\iota}{\hookrightarrow} V \xrightarrow{\pi} V/U$$

eine exakte Sequenz ist. Dabei bezeichne ι die Inklusion und π die kanonische Projektion.

(b) Es seien V_1, V_2 und V_3 von endlicher Dimension.
Zeigen Sie die *Exaktheit der Dualisierung*: Ist

$$V_1 \xrightarrow{\Phi} V_2 \xrightarrow{\Psi} V_3$$

eine exakte Sequenz, so ist auch

$$V_3^\star \xrightarrow{\Psi^\star} V_2^\star \xrightarrow{\Phi^\star} V_1^\star$$

eine exakte Sequenz. Dabei bezeichnen $\Phi^\star$ und $\Psi^\star$ jeweils die dualen Abbildungen.

Kein Einwurf der Lösungen in einen der Briefkästen im dritten Stock des Mathematik-Gebäudes 20.30 neben dem Seminarraum S32. Jede Aufgabe wird auch nicht mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen aber trotzdem unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/la_info2008w/

zum Download bereit.

[1] Diese Aufgabe ist Heiner Utz gewidmet.